Komentarz do wykładu z FCS 04
Podstawy szczególnej teorii względności

Szczególna teoria względności stworzona przez Einsteina jest teorią przestrzeni i czasu. Oparta jest na dwóch postulatach:

- Zasadzie względności Einsteina,
- Zasadzie niezmienniczości prędkości światła

Zasada względności Einsteina stanowi rozszerzenie mechanicznej zasady względności Galileusza na wszystkie bez wyjątku zjawiska fizyczne. Głosi ona, że:

wszystkie prawa przyrody są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Zasadę powyższą można również sformułować następująco:

równania, wyrażające prawa przyrody są niezmienne względem przekształcenia współrzędnych i czasu przy przejściu od jednego inercjalnego układu odniesienia do drugiego

Zasada niezmienniczości prędkości światłą stwierdza:

prędkość światła w próżni jest jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia i nie zależy do ruchu źródeł i odbiorników światła.

Transformacja Lorentza

Załóżmy, że w chwili $t = t' = 0$ początki układów K i K', to jest punkty O i O', pokrywały się. Załóżmy ponadto, że w chwili tej z pokrywających się punktów O i O' wysłano sygnał świetlny w dodatnim kierunku osi Ox i $O'x'$. Po czasie t sygnał ten osiągnie w układzie K punkt o współrzędnej $x = ct$ natomiast w układzie K' punkt o współrzędnej $x' = ct'$

Ze względu na jednorodność przestrzeni i czasu oba układy powinny być związane liniowymi transformacjami współrzędnych i czasu w postaci:

$$x' = a_1 x + a_2 t \quad t' = b_1 x + b_2 t \tag{4. 1}$$

Położenie początku ruchomego układu odniesienia ($x' = 0$) zmierzone w nieruchomym układzie odniesienia wynosi $x = vt$, a zatem współczynniki a_1 i a_2 spełniają następujący związek:

$$a_1 vt + a_2 t = 0 \Rightarrow a_1 v + a_2 = 0 \tag{4.2}$$

Ponieważ z zasady niezależności prędkości światła wynika, że:

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 = \left(a_1 x + a_2 t\right)^2 - c^2 \left(b_1 x + b_2 t\right)^2 \tag{4.3}$$

$$x^2\left(1 - a_1^2 + c^2 b_1^2\right) - c^2 t^2 \left(1 + \frac{a^2}{c^2} - b_2^2\right) - 2\left(a_1 a_2 - c^2 b_1 b_2\right) zt = 0 \tag{4.4}$$

Ponieważ związek (4.4) musi być spełniony dla każdego (x,t) wobec tego każdy ze współczynników musi być równy zeru co w połączeniu z relacją (4.2) prowadzi do następujących rozwiązań:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad b_1 = \frac{\frac{-v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$a_2 = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.5}$$

Szukane transformacje, zwane transformacjami Lorentza, mają zatem postać następującą:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.6}$$

Długość ciał w różnych układach odniesienia

Załóżmy, że w układzie K' znajduje się spoczywający pręt o długości l_0, równoległy do osi $O'x'$. Długość pręta jest określona przez współrzędne jego końców:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 \tag{4.7}$$

Współrzędne x'_1 i x'_2 nie zależą do czasu t'. Niech rozważany pręt porusza się względem układu K z prędkością v w dodatnim kierunku osi Ox. Aby określić jego długość w układzie K należy zarejestrować współrzędne jego końców x_1 i x_2 w tej samej chwili czasu t. Długość pręta w układzie K wynosi:

$$l = x_2(t) - x_1(t) \tag{4.8}$$

Zauważmy, że prędkość v jest prędkością układu K', w którym pręt pozostaje nieruchomy względem układu K. Układ w którym ciało pozostaje nieruchome nazywamy układem własnym ciała. Korzystając ze wzorów transformacyjnych możemy napisać:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.9}$$

Wobec tego:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.10}$$

Po przekształceniu znajdujemy:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4.11}$$

Ostatni wzór opisuje związek pomiędzy długością pręta l mierzoną w układzie w którym pręt porusza się z prędkością v równoległą do pręta i jego długością własną l_0 (długością w układzie względem którego pręt pozostaje w spoczynku). Wzór ten opisuje tzw. skrócenie Lorentza. Należy pamiętać, że skrócenie następuje tylko w kierunku ruchu ciała, natomiast wymiary w innych kierunkach pozostają bez zmian.

Czas trwania zdarzeń w różnych układach

Załóżmy, że w pewnym punkcie o współrzędnych $x' = a$ w układzie K' zaszło zdarzenie trwające :

$$\Delta t_0 = t'_2 - t'_1 \tag{4.12}$$

Jest to czas trwania zdarzenia w układzie własnym obiektu, którego zdarzenie dotyczy. Niech obiekt ten porusza się z prędkością v w dodatnim kierunku osi OX układu K. Prędkość v jest zarazem prędkością względną układów K i K'. Początkowi i końcowi zdarzenia w układzie K odpowiadają czasy:

$$t_2 == \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t_1 == \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.13}$$

Tak więc czas trwania zdarzenia w układzie K jest równy:

$$\Delta t = t_2 - t_1 == \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4.14)$$

Widać z tego, że zdarzenia w układzie, w którym obiekt się porusza trwają dłużej. Zauważmy, że w układzie K ciało, którego dotyczy zdarzenie przebywa w czasie trwania zdarzenia drogę $v\Delta t$

Fale materii – długość fali de Broglie'a 5

Podstawowym założeniem de Broglie' było to, że z każdym okruchem materii jest stowarzyszona wibracja. Energia kantowa tego drgania (jego energia falowa) równa jest – z założenia – energii spoczynkowej ciała (jego energii cząsteczkowej)

$$E_0 = mc^2 = h\nu \qquad (5.1)$$

W każdej wibracji coś musi wykonywać drgania. De Broglie nie mógł nic powiedzieć o naturze drgającej wielkości w swoich falach materii. Przypuśćmy, że nadamy tej wielkości oznaczenie Ψ. W układzie odniesienia połączonym z obiektem przemieszczenie Ψ można zapisać jako

$$\Psi = \Psi_0 \sin \omega t \qquad (5.2)$$

gdzie $\omega = 2\pi\nu$ jest częstotliwością kołową, a ν częstotliwością drgań. Przypuśćmy, że umieściliśmy się sami w układzie laboratoryjnym odniesienia, w którym rozpatrywany obiekt porusza się z prędkością u w kierunku x. Przemieszczenie fal materii w tym laboratoryjnym układzie odniesienia można opisać stosując lorentzowskie przekształcenie czasu t, skąd

$$\Psi' = \Psi_0 \sin \omega\left(t' - \frac{\beta x'}{c}\right)\gamma \qquad (5.3)$$

Drgania fali materii stały się teraz liniową falą rozchodzącą się w kierunku osi x. Fale rozchodzące się w przestrzeni t', x' można przestawić jako:

$$\Psi' = \Psi_0 \sin(\omega t' - kx') \qquad (5.4)$$

gdzie k jest liczbą falową drgań $(k = 2\pi/\lambda)$. Jeżeli przyrównamy współczynnik przy x' w argumentach wzorów (5.3) i (5.4), dostaniemy

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega\beta\gamma}{c} = \frac{2\pi\nu u\gamma}{c^2} \qquad ()$$

Eliminując ν z wyrażenia po prawej stronie i wzoru (5.1) otrzymujemy.:

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{mc^2}{h}\right)\frac{u\gamma}{c^2} \qquad (5.6a)$$

$$\lambda = \frac{h}{mu\gamma} = \frac{h}{p} \qquad (5.6b)$$

Tak więc długość fali de Broglie'a jest odwrotnie proporcjonalna do pędu ciała, przy czym stała Plancka h jest współczynnikiem proporcjonalności. Należałoby w tym miejscu zapytać w jakim celu de Broglie próbował w taki sposób skomplikować fizykę. Odpowiedź brzmi, że koncepcja fal de Broglie stwarza nam dużo bardziej fundamentalne podstawy do kwantyzacji orbit elektronowych w atomie Bohra.

Nic pożytecznego nie może wyniknąć z zastanawiania się w jakim konkretnie miejscu na swojej orbicie znajduje się w danej chwili elektron. Wobec tego możemy założyć, że fala

związana z elektronem jest równomiernie rozprowadzona po obwodzie orbity. W takim razie dla każdej orbity powinien być spełniony warunek istnienia fali stojącej; inaczej mówiąc fala powinna łagodnie i gładko łączyć się sama ze sobą wokół całej orbity. Odpowiada to żądaniu, by orbita zawierała całkowitą liczbę długości fal:

$$2\pi r_n = n\lambda \qquad (5.7)$$

Jeżeli pomnożymy to równanie przez $p/2\pi$, to

$$pr_n = L_n = n\left(\frac{h}{2\pi}\right) \qquad (5.8)$$

co jest identyczne z warunkiem Bohra na moment pędu. Hipoteza de Broglie'a została potwierdzona w roku 1927 przez Davissona i Gemera, którzy badali rozpraszanie na krysztale niklu. Rozpraszanie miło charakter selektywny – elektrony były rozpraszane pod odpowiednimi kątami. Wyniki doświadczeń można było wyjaśnić tylko przypisując elektronom właściwości falowe i traktując rozpraszanie jak dyfrakcję elektronów na sieci krystalicznej. W tym samym roku Thomson i Tartakowski otrzymali po przejściu elektronów przy przejściu elektronów przez cienkie folie złote obrazy dyfrakcyjne identyczne, jak dla promieni rentgenowskich.

Zasada nieoznaczoności Heisenberga

W myśl pojęć mechaniki klasycznej stan cząstki jednoznacznie określa podanie trzech współrzędnych położenia cząstki i trzech składowych jej pędu względnie prędkości. W każdej chwili wszystkie te wielkości mają ściśle określone wartości mogą być jednoznacznie zmierzone w zasadzie z dowolnie dużą dokładnością zależną wyłącznie do precyzji użytej aparatury. Kolejne, zmieniające się w czasie, stany cząstki tworzą tor cząstki. W mechanice kwantowej, a więc w przypadku mikrocząstek w mikropolach, istnieje istotne ograniczenie stosowalności takiego opisu. Ograniczeniem tym jest zasada nieoznaczoności Heisenberga sformułowana w 1927 roku.

Jedną z właściwości mikrocząstek jest to, że zmienne dynamiczne mogą być wyznaczone tylko z pewną dokładnością. Istnieją pary zmiennych, nieokreśloności wyznaczenia, których powiązane są w pary. Przykładem może być współrzędna x i odpowiadająca jej składowa p_x pędu. Nieokreśloności wyznaczenia tych wielkości powiązane są zależnością

$$\Delta x \Delta p_x > \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi} \qquad (5.9)$$

Ostatnia nierówność jest również słuszna dla innych par wielkości np. energii i czasu. Wielkości takie noszą nazwę zmiennych sprzężonych. Jeżeli oznaczymy dwie wielkości sprzężone przez A i B to zależność między nieokreślonościami ich wyznaczenia możemy zapisać następująco

$$\Delta A \cdot \Delta B > \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi} \qquad (5.10)$$

Nierówność ta wyraża zasadę nieoznaczoności Heisenberga:

Iloczyn nieokreśloności dwóch wielkości sprzężonych nie może być co do rzędu wielkości mniejsza od stałej Plancka.

Nieoznaczoność położenia i pędu cząstki wiąże się ściśle z ogólnymi własnościami fal, które w mechanice kwantowej opisują zachowanie cząstek. Cząstkę poruszającą się w kierunku osi x ze ściśle określonym pędem $p_x(\Delta p_x = 0)$ reprezentuje fala de Broglie'a o

jednej ściśle określonej długości fali $\lambda = \frac{h}{p_x}$ i liczbie falowej $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p_x}{h}$. Jest to więc fala monochromatyczna płaska dana równaniem:

$$\Psi_k(x,t) = \Psi_0 e^{i(kx-\omega(k)t)} \qquad (5.11)$$

Zakładając dla uproszczenia, że cząsteczka posiada tylko energię kinetyczną, tzn. przyjmując stałą energię potencjalną cząstki jako zero, otrzymamy $E = \frac{p^2}{2m}$. Używając związku postulowanego przez de Broglie' a otrzymujemy związek (zwany często związkiem dyspersyjnym):

$$E = \frac{h^2 k^2}{8\pi^2 m} \qquad (5.12)$$

W tym przypadku opisywana fala przedstawia sinusoidę rozciągającą się $-\infty$ do $+\infty$. Ściśle określonemu pędowi odpowiada więc zupełna nieoznaczoność położenia cząstki co jest w zgodzie z zasadą Heisenberga. W praktyce cząstka zajmuje przedział przestrzeni Δx, a prawdopodobieństwo znalezienia cząstki poza tym przedziałem jest praktycznie równe zeru. Z drugiej strony to odpowiada znalezieniu cząstki w przedziale pędu Δp_x co w rezultacie da ciąg falowy, który może być przedstawiony za pomocą sumy (całki).

$$\Psi(x,t) = \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} \Psi_0(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk \qquad (5.13)$$

Jest tzw. paczka falowa otrzymana przez superpozycję nieskończonej liczby fal harmonicznych o różnych liczba falowych z przedziału zmienności $(k-\Delta k, k+\Delta k)$.

Równanie Schrodingera

W opisie mechaniki klasycznej podstawą i punktem wyjścia każdego zagadnienia mechanicznego jest równanie ruch Newtona:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad (5.14)$$

Z równania tego znając stan początkowy (położenie i prędkość) oraz działające siły możemy znaleźć trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$, którą traktuje się jako rozwiązanie zagadnienia. Przypomnijmy, że równanie Newtona nie było wyprowadzane, ale przyjęto je jako zasadę wynikającą z konsekwencji.

W mechanice kwantowej cząstkę opisuje nie równanie trajektorii, ale funkcja falowa $\Psi(\vec{r},t)$. Interesuje nas fundamentalne równanie mechaniki kwantowej, zwane równaniem Schrodingera (odpowiednik równania Newtona w mechanice klasycznej), opisujące zachowanie funkcji falowej w przestrzeni i czasie. W tym celu przeprowadźmy pewne indukcyjne rozumowanie, które naprowadzi nas na postać równania Schrodingera. Nie należy tego traktować jako wyprowadzenie równania Schordingera ponieważ równie Schrodingera nie dedukcyjnym wnioskiem z pojęć mechaniki klasycznej (natomiast z równania Schrodingera można otrzymać równania Newtona).

Rozpatrzmy najpierw przypadek cząstki swobodnej posiadającej tylko energię kinetyczną i rozchodzącą się wzdłuż osi x. W tym przypadku energię kinetyczną możemy opisać związkiem $E_k = \frac{p^2}{2m}$. Przyjmijmy, że cząstkę taką opisuje paczka fal płaskich:

$$\Psi(x,t)=\int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k}\Psi_0(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dk \qquad (5.15)$$

Biorą pod uwagę, że funkcja $\Psi(x,t)$ reprezentuje fale materii wobec tego powinien być spełniony związek dyspersyjny:

$$E=h\nu=\frac{h^2k^2}{8\pi^2m} \qquad (5.16)$$

Mamy zatem:

$$\int\left(h\nu-\frac{h^2k^2}{8\pi^2m}\right)\Psi_0(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dk=0 \qquad (5.17)$$

Co oznacza, że :

$$i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{h^2}{8\pi m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} \qquad (5.18)$$

Rozpatrzmy teraz przypadek ogólniejszy, gdy cząstka nie jest swobodna tzn. gdy porusza się w jakimś polu sił, opisanym przez funkcję $U=U(x,t)$. Funkcja ta, o ile explicite nie zależy od czasu, czyli funkcja $U=U(x)$, opisuje energie potencjalną cząstki. Schrodinger przyjął, że w ogólnym przypadku rolę związku dyspersyjnego (5.16) spełnia związek:

$$E=h\nu=\frac{h^2k^2}{8\pi^2m}+U(x,t) \qquad (5.19)$$

Korzystając z tego związku w tożsamości analogicznej do (5.) otrzymujemy:

$$i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{h^2}{8\pi m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+U(x,t)\Psi(x,t) \qquad (5.20)$$

W przestrzeni trójwymiarowej przy pełnym rozpisaniu wszystkich zmiennych, równanie to przyjmuje postać:

$$i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial\Psi(x,y,zt)}{\partial t}=-\frac{h^2}{8\pi^2m}\left(\frac{\partial^2\Psi(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right)+U(x,y,z,t)\Psi(x,y,z,t)$$

(5.21)

Jest to ogólna postać tzw. czasowego równania Schrodingera dla cząstki o masie m poruszającej się w polu sił opisanym przez funkcję $U(x,y,z,t)$. Wyrażenie :

$$H=E=\frac{p^2}{2m}+U(x,y,z,t) \qquad (5.21)$$

Będące sumą energii kinetycznej i potencjalnej określa się często mianem funkcji Hamiltona. Jeżeli $U=U(x,y,z,t)$ to funkcja Hamiltona przestawia sumę energii kinetycznej i potencjalnej, a zatem energię całkowitą cząstki, względnie w przypadku złożonym - układu cząstek.

Rozwiązaniem równania Schrodingera jest funkcja falowa $\Psi(x,t)$, która sama jako taka nie ma sensu fizycznego. Sens fizyczny ma kwadrat modułu tej funkcji $\Psi(x.t)\Psi^*(x.t)=|\Psi(x.t)|^2$, który odpowiada gęstości prawdopodobieństwa znalezienia się cząstki w punkcie x w chwili t. Funkcja falowa powinna być funkcją jednoznaczną, skończoną, ciągłą i mieć ciągłe pochodne. Ponieważ prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w całej przestrzeni lub zadanym obszarze jest pewnością (jeżeli rozważamy cząstkę w

jakimś obszarze to ona musi tam się znajdować), więc całka z gęstości prawdopodobieństwa po całej przestrzeni lub po zadanym obszarze musi być równa jedności:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x.t)\Psi^*(x.t)dx = 1 \qquad (5.22)$$

Ostatni warunek jest tzw. warunkiem unormowania.

W zagadnieniach fizycznych funkcja Hamiltona często nie zależy od czasu w sposób jawny i przedstawia stałą w czasie energię całkowitą cząstki względnie układu cząstek. Stany dla których tak jest tzn. dla których:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad (5.23)$$

nazywamy stanami stacjonarnymi. Dla stanów stacjonarnych możliwe jest rozdzielenie funkcji falowej zmiennych przestrzennych od zmiennej czasowej poprzez proces separacji tzn. można funkcje falową przedstawić w postaci iloczynu (dla prostoty zrobimy to w przypadku jednowymiarowym):

$$\Psi(x,t) = \psi(x) f(t) \qquad (5.24)$$

Podstawmy powyższą funkcje do jednowymiarowego równania Schrodingera:

$$i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial(\psi(x)f(t))}{\partial t} = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{2m}\frac{\partial^2(\psi(x)f(t))}{\partial x^2} + U(x)\psi(x)f(t) \qquad (5.25)$$

Jeżeli wykonamy różniczkowanie i podzielimy przez $\psi(x)f(t)$ to otrzymamy:

$$i\frac{h}{2\pi}\frac{1}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\left(\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + U(x)\right) \qquad (5.26)$$

Lewa strona ostatniego równania zależy tylko od czasu, natomiast prawa od współrzędnych przestrzennych. Równość obu stron dla dowolnych wartości niezależnych zmiennych czasu i położenia jest możliwa, gdy obydwie strony równania są równe jednej i tej samej stałej wartości C. Otrzymujemy zatem dwa równania różniczkowe. Jedno z nich na funkcje $f(t)$ ma postać :

$$i\frac{h}{2\pi}\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = C \text{ czyli } \frac{df(t)}{f} = -\frac{2\pi i}{h}Cdt \qquad (5.27)$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$f(t) = Ae^{-i\frac{2\pi C}{h}t} \qquad (5.28)$$

Stała C musi oczywiście odpowiadać stałej energii E. Widzimy więc, że dla stanów stacjonarnych można przeprowadzić separację zmiennych przy czym część funkcji falowej zależna do czasu posiada wtedy w każdym zagadnieniu taką samą postać:

$$f(t) = Ae^{-i\frac{2\pi E}{h}t} \qquad (5.29)$$

Do znalezienia pozostaje tylko część funkcji zależna od położenia. Znajdujemy ją z drugiego równania różniczkowego otrzymanego z przyrównania prawej strony równania (5.) do stałej E

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad (5.30)$$

Równanie to nazywa się bezczasowym równaniem Schrodingera albo równaniem Schrodingera dla stanów stacjonarnych. Bezczasowe równanie Schrodingera jest szczególnym rodzajem równania różniczkowego, często spotykanym w innych zagadnieniach fizyki. Równanie zawiera pewien parametr E i jako rozwiązanie interesują nas nie tylko funkcje ψ

spełniające to równanie, ale również dopuszczalne wartości parametru E (energii) dla których funkcje falowe ψ spełniają narzucone warunki brzegowe i wymagania odnośnie jednoznaczności ciągłości itd. Z reguły te dopuszczalne wartości tworzą zbiór dyskretny $E_1, E_2, \ldots E_n$, zwanych wartościami własnymi energii. Są to po prostu dozwolone skwantowane poziomy energetyczne cząsteczki czy też układu. Należy sobie zdawać sprawę z tego, że kwantowanie energii wprowadzone w formie sztucznych zakazów przez Plancka, Bohra i innych w sposób naturalny będzie się pojawiać w rozwiązaniach równań Schrodingera w wyniku narzucenia odpowiednich warunków brzegowych. Zwykle też bezczasowe równanie Schrodingera spełnia bardzo wiele funkcji falowych, odpowiadających różnym wartością własnym. Funkcje te nazywamy funkcjami własnymi. Jeżeli jednej wartości własnej energii E_i odpowiada k funkcji własnych $\psi_{ii}, \psi_{i2}, \ldots \psi_{ik}$ to taki poziom energetyczny nazywamy k-krotnie zdegenerowanym. Równanie Schrodingera jest stanie wyjaśnić wszystkie zjawiska atomowe z wyjątkiem tych, które wiążą się z magnetyzmem i efektami relatywistycznymi. Jednak w praktyce trudności matematyczne rozwiązania równania Schrodingera są tak duże, że tylko nieliczne proste przypadki dają się rozwiązać w sposób ścisły.